

Université Paris-Saclay
ENS Paris-Saclay

Travaux dirigés
Physique non-linéaire
M1 de physique fondamentale

Année 2025-2026

TD1 : Dynamiques de populations

1 Démographie

Nous décrivons ici quelques modèles élémentaires de démographie et leur application au cas des États-Unis. Les données par décennie pour la population américaine de 1610 à 2020 sont accessibles sur la page : https://fr.wikipedia.org/wiki/Démographie_des_États-Unis

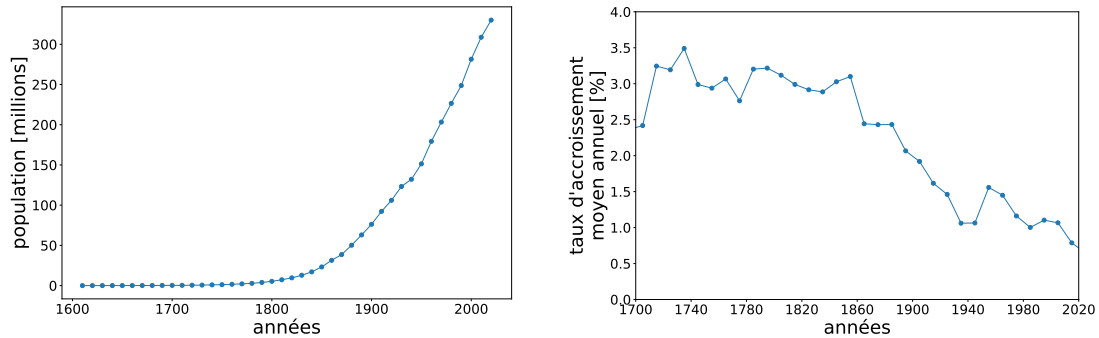


Figure 1: (Gauche) : Nombre d'habitants aux États-Unis au cours des derniers siècles, à partir de données démographiques. (Droite) : Evolution du taux d'accroissement sur cette même période.

On définit le taux d'accroissement de la population par $\alpha = \frac{1}{N} \frac{dN}{dt}$ et N_0 la population initiale.

1. **Modèle de Malthus (1826):** un modèle minimaliste considère un taux d'accroissement constant. Quelle est alors la loi $N(t)$? Comparer qualitativement aux données américaines en montrant que cela permet de distinguer de grandes périodes historiques.
2. *Facultatif* **Modèle de Verhulst (1840):** il introduit un facteur d'auto-régulation intrinsèque de la population. Pour ce faire, il propose une loi $\alpha(N) = \alpha_0(1 - N/N_\infty)$ avec $\alpha_0 > 0$ et $N < N_\infty$ pour décrire une croissance.
 - (a) Quelle est la solution $N(t)$? À quoi correspond N_∞ ?
 - (b) Discuter la stabilité du comportement aux temps longs. En déduire la forme de $\alpha(t)$. Ce modèle est-il mieux adapté à la description de la population américaine au cours des années 1800-2000 ?
3. *Facultatif* **Modèle de Gompertz (1825):** un autre modèle de régulation intrinsèque avec cette fois $\alpha(N) = a \ln(N_\infty/N)$ pour $N < N_\infty$ avec $a > 0$. Trouver la solution $N(t)$. Quelle est la particularité du taux d'accroissement initial ?
4. *Facultatif* On introduit un modèle de ralentissement contrôlé par l'évolution historique. On suppose que le taux d'accroissement ne dépend que du temps sous une forme $\alpha(t)$ connue. Quelle est dans ce cas la forme générique de la loi $N(t)$ en fonction de $\alpha(t)$? Dans le cas américain, on choisit un fit de la forme $\alpha(t) = \alpha_0/(1 + ae^{(t-t_0)/\tau})$ qui généralise le taux d'accroissement du modèle de Verhulst. Quelle est alors la loi $N(t)$ correspondante ?

2 Populations en interaction: modèle de Lotka-Volterra

Lotka (1880-1949) et Volterra (1860-1940) proposèrent un modèle pour expliquer les oscillations entre populations de proies $N(t)$ et de prédateurs $P(t)$, supposées variées continûment. Les équations gouvernant la dynamique des deux populations en interactions sont données par

$$\frac{dN}{dt} = (a - bP(t))N(t) \quad (1)$$

$$\frac{dP}{dt} = (-d + cN(t))P(t) \quad (2)$$

avec a, b, c et d des constantes positives. L'espace des points $\vec{X} = (N, P)$ constituera l'espace des phases, seul le cadran $N, P \geq 0$ est accessible.

1. Interpréter les différentes constantes et différents termes dans les équations.
2. Quelles sont les solutions triviales ? À quelles trajectoires correspondent-elles dans l'espace des phases ?
3. Quels sont les points fixes ?
4. Quelle est la dynamique autour du point fixe trivial ?
5. Linéariser les équations pour de petits mouvements autour du point fixe non-trivial. Montrer que l'on obtient des solutions oscillantes.
6. En admettant que les solutions sont périodiques de périodes T , calculer les valeurs moyennes $\bar{N}$ et $\bar{P}$ des populations sur une période.
7. En éliminant t des équations différentielles, identifier une constante du mouvement.
8. *Facultatif* Décrire les trajectoires dans l'espace des phases. On montrera en particulier qu'elles sont fermées.

TD 2 : Bifurcations

1 Bifurcation fourche sous-critique. Apparition d'hysteresis

Considérons le système unidimensionnel régi par l'équation d'évolution : $\dot{x} = f_\mu(x)$.

Nous nous intéressons à son comportement au voisinage de $x = 0$ en fonction d'un paramètre de contrôle μ .

1. La forme la plus simple conduisant à une bifurcation appelée "fourche supercritique" est la suivante : $\dot{x} = \mu x - x^3$. Tracer son diagramme de stabilité.
2. Comment se comporte le système $\dot{x} = \mu x + x^3$?
3. La bifurcation "fourche sous-critique" $\dot{x} = \mu x + x^3 - x^5$ fait donc apparaître un terme en x^5 . Tracer son diagramme de stabilité. Montrer que ce système présente un phénomène d'hystérésis.

2 Seuil laser (Facultatif)

Les équations simplifiées d'évolutions respectives du nombre de photons, noté f et de l'inversion de population, notée n , dans une cavité laser sont :

$$\dot{f} = \kappa n f - \frac{f}{\tau_{cav}} \quad (3)$$

$$\dot{n} = \frac{n_0 - n}{\tau_1} - \kappa n f \quad (4)$$

où τ_{cav} est le temps de vie d'un photon dans le résonateur optique, τ_1 le temps caractéristique de désexcitation spontanée d'un émetteur du milieu à gain, où κ est une constante positive dépendant de la nature des émetteurs et où n_0 est le paramètre de pompage, positif.

- 1 - Points fixes** Donner les points fixes possibles, en fonction du paramètre de pompage n_0 .
En déduire l'existence d'un seuil n_{seuil} de pompage au-delà duquel il y a émission laser.

2 - Stabilité des solutions Pour étudier la stabilité de chacune des deux solutions (points fixes) trouvées précédemment, nous supposons que $n(t)$ et $f(t)$ varient mais restent proches de ces points fixes n_∞ et f_∞ :

$$n = n_\infty + \delta n(t) \quad (5)$$

$$f = f_\infty + \delta f(t) \quad (6)$$

En injectant ces expressions dans (1) et (2), étudier la stabilité de ces solutions, en particulier au dessus du seuil. En déduire la stabilité de la solution "laser allumé".

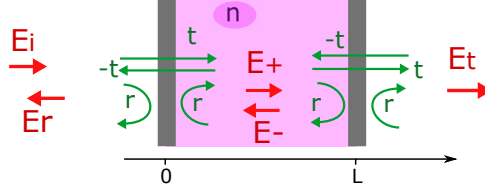
3 - Question bonus : lasers de types A et B En plus de dire quelle solution est stable, cette étude peut nous renseigner sur le comportement dynamique du laser. On peut en outre en déduire des informations sur sa dynamique de démarrage. Dans les deux cas suivants, décrire le comportement dynamique du retour à l'équilibre après une faible perturbation du laser :

- Laser de type A : $\tau_{cav} \gg \tau_1$ (exemple : l'hélium-néon et des lasers à colorant)
- Laser de type B : $\tau_{cav} \ll \tau_1$ (exemple : des lasers à Néodyme-YAG, Rubis, à diodes lasers et certains lasers à CO₂.)

3 Bistabilité optique (Facultatif)

3.1 Cavité Fabry-Perot

Un résonateur optique est constitué de deux miroirs plans identiques parallèles entre eux et distants d'une longueur L . La cavité entre les miroirs est remplie d'un milieu transparent d'indice de réfraction n . Les miroirs utilisés sont partiellement réfléchissants ; leurs coefficients de réflexion et de transmission en amplitude, pris réels, sont r et t en incidence normale. On note $R = r^2$ et $T = t^2 = 1 - R$ les coefficients de réflexion et de transmission en intensité.



L'ensemble constitue un interféromètre Fabry-Perot éclairé sous incidence normale par une onde plane monochromatique de longueur d'onde dans le vide λ_0 . Dans un modèle scalaire du champ lumineux, cette onde est représentée par $E_0(z, t) = E_0 \exp(-i(\omega_0 t - k_0 z))$, avec $\omega_0 = 2\pi c/\lambda_0$ et $k_0 = 2\pi/\lambda_0$, et c la vitesse de la lumière dans le vide.

Les relations de "passage" du champ électrique au niveau des deux miroirs, ainsi que le déphasage d  à la propagation assurent que l'intensité transmise par le Fabry-Perot est donnée par $I_t = \frac{I_0}{1 + m \sin^2(\varphi/2)}$ où $I_0 = \frac{E_0^2}{2}$ est l'intensité de l'onde incidente, où $m = \frac{4R}{(1-R)^2}$ et où $\varphi = 2nk_0 L$ est le déphasage subi par l'onde après un aller-retour dans la cavité.

1. Représenter graphiquement l'évolution de $\tau_1(\varphi) = \frac{I_t}{I_0}$ en fonction de φ dans le cas particulier où $R=0,9$ que l'on consid rera par la suite.
2. Le champ électrique intra-cavité, composé de deux ondes contra-propageantes de même fréquence et d'amplitudes similaires, présente des ventres et des noeuds tout au long de la cavité. Malgré cela, on peut montrer que l'intensité lumineuse moyenne intracavité s'exprime comme $I_{moy} = \beta I_t$ où $\beta = \frac{1+R}{T}$ est une constante. Donner sa valeur numérique.

3.2 Effet Kerr et bi-stabilité optique

La cavité est maintenant remplie d'un milieu présentant un effet Kerr optique, c'est-à-dire d'un matériau diélectrique non-linéaire dont l'indice de réfraction dépend de l'intensité moyenne I_{moy} selon la loi $n = n_0 + n_2 I_{moy}$, où n_0 et n_2 sont des constantes positives.

1. Montrer que le déphasage φ peut désormais s'écrire sous la forme $\varphi_0 + \gamma I_t$ et donner les expressions de φ_0 et γ . En déduire qu'il existe une seconde relation pour le facteur de transmission notée $\tau_2(\varphi) = \frac{I_t(\varphi)}{I_0}$ (différente de $\tau_1(\varphi)$) et que l'on exprimera en fonction de γ , I_0 , φ_0 et φ . On se limitera au cas où $2p\pi - \pi < \varphi_0 < 2p\pi$.
2. Montrer, par analyse graphique en traçant $\tau_1(\varphi)$ et $\tau_2(\varphi)$ sur le même graphe, que si l'intensité d'entrée I_0 ne dépasse pas une certaine intensité limite I_{olim} , les intersections des deux courbes se situent aux alentours du même pic d'ordre p de la fonction transfert du Fabry-Perot. On suppose que cette condition sera réalisée par la suite.
3. Montrer que si φ_0 est inférieur à une certaine limite φ_{olim} , il peut exister plusieurs intersections entre les deux courbes lorsque I_0 varie. Mettre en évidence 5 régimes spécifiques correspondant respectivement à l'existence de 1, 2, 3, 2 et 1 points fixes.

On admet que dans le cas où 3 points fixes existent, le point intermédiaire est instable.

4. Justifier alors la dénomination d'état bistable. Montrer que si I_0 décrit de manière périodique les 5 régimes précédents, alors la courbe $I_t = g(I_0)$ décrit un cycle d'hystérésis. En déduire la possibilité de mémoire optique.

TD 3 : Rotation d'une raquette de tennis

La raquette de tennis est un exemple de corps dont la rotation vis-à-vis de l'un de ses axes propres est instable. Les objets célestes sont majoritairement sphériques et ont une rotation stable sur eux-mêmes... à l'exception de quelques-uns. Dans le système solaire, Hypérion, satellite de Saturne, en est un. Les sondes Voyager ont révélé le caractère chaotique de sa rotation.

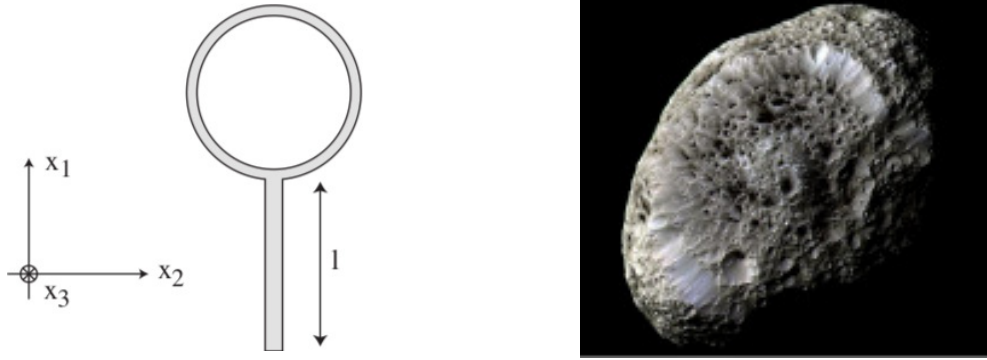


Figure 2: Gauche : Modélisation d'une raquette de tennis. Droite : Photographie d'Hyperion. Source <https://www.le-systeme-solaire.net/hyperion.html>

On schématise une raquette de tennis comme l'assemblage d'une tige homogène de longueur ℓ et de masse m , et d'un cerceau de diamètre ℓ et de même masse m (voir la figure). On note G le centre de masse de la raquette et $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ le repère lié à la raquette. Si on lance une raquette de tennis, on constate que la rotation autour de l'axe $\vec{e}_3$ s'effectue sans problème, alors que celle autour de l'axe $\vec{e}_2$ s'accompagne d'un mouvement de vrille. L'objectif de ce TD est de montrer cet effet.

Le système est modélisé par les équations d'Euler¹ sans force appliquée (même pas la gravité)

$$I_1 \frac{d\Omega_1}{dt} - (I_2 - I_3)\Omega_2\Omega_3 = 0 \quad + \text{permutations circulaires des indices 1, 2 et 3} \quad (7)$$

où $(\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ sont les composantes du vecteur instantané de rotation $\vec{\Omega}$ dans le repère $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$. Ce repère a été choisi afin que le tenseur d'inertie $I = (I_{ij})$ soit diagonal. De manière générale, dans un repère quelconque $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ de centre O , I est défini par $\vec{\sigma} = I\vec{\Omega}$, ce qui conduit aux composantes suivantes :

$$I_{xx} = \iiint (y^2 + z^2) dm \quad I_{xy} = - \iiint xy dm \quad (8)$$

avec permutations circulaires sur x, y et z .

1. Calculer le tenseur d'inertie $\mathcal{I}_G$, par rapport au centre de masse G , sous la forme

$$\mathcal{I}_G = m\ell^2 \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$$

¹Ces équations s'obtiennent à partir du théorème du moment cinétique sans force appliquée $d\vec{\sigma}/dt = \vec{0}$. Puis on effectue un changement de repère dans le référentiel tournant grâce à la formule suivante, valable pour tout vecteur $\vec{A}$:

$$\left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \left. \frac{d\vec{A}}{dt} \right|_{\mathcal{R}'} + \vec{\Omega}_{\mathcal{R}/\mathcal{R}'} \wedge \vec{A}$$

On constate que $a + b = c$; pouvez-vous justifier ce résultat ?

2. Afin d'étudier la stabilité de la rotation successivement autour des axes $\vec{e}_1$, $\vec{e}_2$ et $\vec{e}_3$, on suppose la rotation de la forme

$$\vec{\Omega} = \Omega_0 \vec{e}_i + \vec{\omega}, \quad (\text{avec } \omega \ll \Omega_0).$$

Ω_0 représente la vitesse angulaire de rotation autour de l'un des 3 axes, et ω est une petite perturbation. On va résoudre l'équation du mouvement pour $\omega(t)$, et vérifier si la perturbation décroît (rotation stable) ou au contraire croît (rotation instable).

Linéariser les équations d'Euler et résoudre l'équation du mouvement pour $\vec{\omega}(t)$, en choisissant successivement $i = 1, 2$ et 3 . En déduire que la rotation autour des axes $\vec{e}_1$ et $\vec{e}_3$ est stable, alors que celle autour de l'axe $\vec{e}_2$ est instable.

TD4 : Oscillateur de Duffing

1 Généralités

On considère l'équation de Duffing ($\delta > 0$) :

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \alpha x + \beta x^3 = \gamma \cos(\omega t)$$

1. Interpréter physiquement l'origine physique de chacun des termes.
2. Quel est l'espace des phases ?
3. En introduisant une variable $\psi(t) = \omega t$, proposer une réécriture de l'équation sous forme d'un système autonome du premier ordre (forme normale). Proposer une section de Poincaré pour analyser la trajectoire en distinguant les cas $\gamma \neq 0$ et $\gamma = 0$.

2 Oscillateur libre ($\gamma = 0$)

1. Lorsque $\delta = 0$, utiliser la conservation de l'énergie pour discuter qualitativement des différentes trajectoires possibles dans l'espace des phases. Quelle est la section de Poincaré associée ?
2. Lorsque $\delta > 0$:
 - (a) Quels sont les points fixes du système ? Discuter la stabilité de ces points fixes.
 - (b) Décrire qualitativement le type de trajectoires possibles. Dans le cas $\beta = 0$, déterminer les différents types de comportements. Quelle est la section de Poincaré associée à chacun ?
3. **Théorie des perturbations pour l'accrochage (méthode de Poincaré–Lindstedt):** On veut expliquer le phénomène d'accrochage sur une fréquence différente de la fréquence propre en raison des non-linéarités. On considère l'équation homogène

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \varepsilon x^3$$

avec $\varepsilon \ll 1$ un paramètre contrôlant la perturbation non-linéaire.

- (a) Il est naturel de rechercher une solution sous la forme d'un développement en ε selon

$$x = x_0 + \varepsilon x_1 + \varepsilon^2 x_2 + \dots$$

dans laquelle x_0 sera naturellement solution de l'équation homogène satisfaisant aux conditions initiales données. Le reste du développement peut être vu comme une solution particulière. Quelles conditions initiales prendre pour les autres x_j ?

- (b) Déterminer les équations que doivent satisfaire x_1 et x_2 .
- (c) On s'intéresse à la solution pour x_1 . On rappelle que $\cos^3 y = \frac{1}{4}(\cos(3y) + 3\cos y)$. Considérer séparément les solutions particulières associées aux deux forçages. Montrer qu'on peut choisir une des solutions particulières sous la forme $t \sin t$. Elle diverge donc. *Facultatif* : retrouver cette forme de solution particulière par la fonction de Green.
- (d) Pour éliminer cette divergence, il convient de rechercher comme solution une forme principale $A \cos(\omega t + \phi)$ mais en tenant compte du fait que la pulsation ω va être modifiée par le forçage de façon perturbative selon

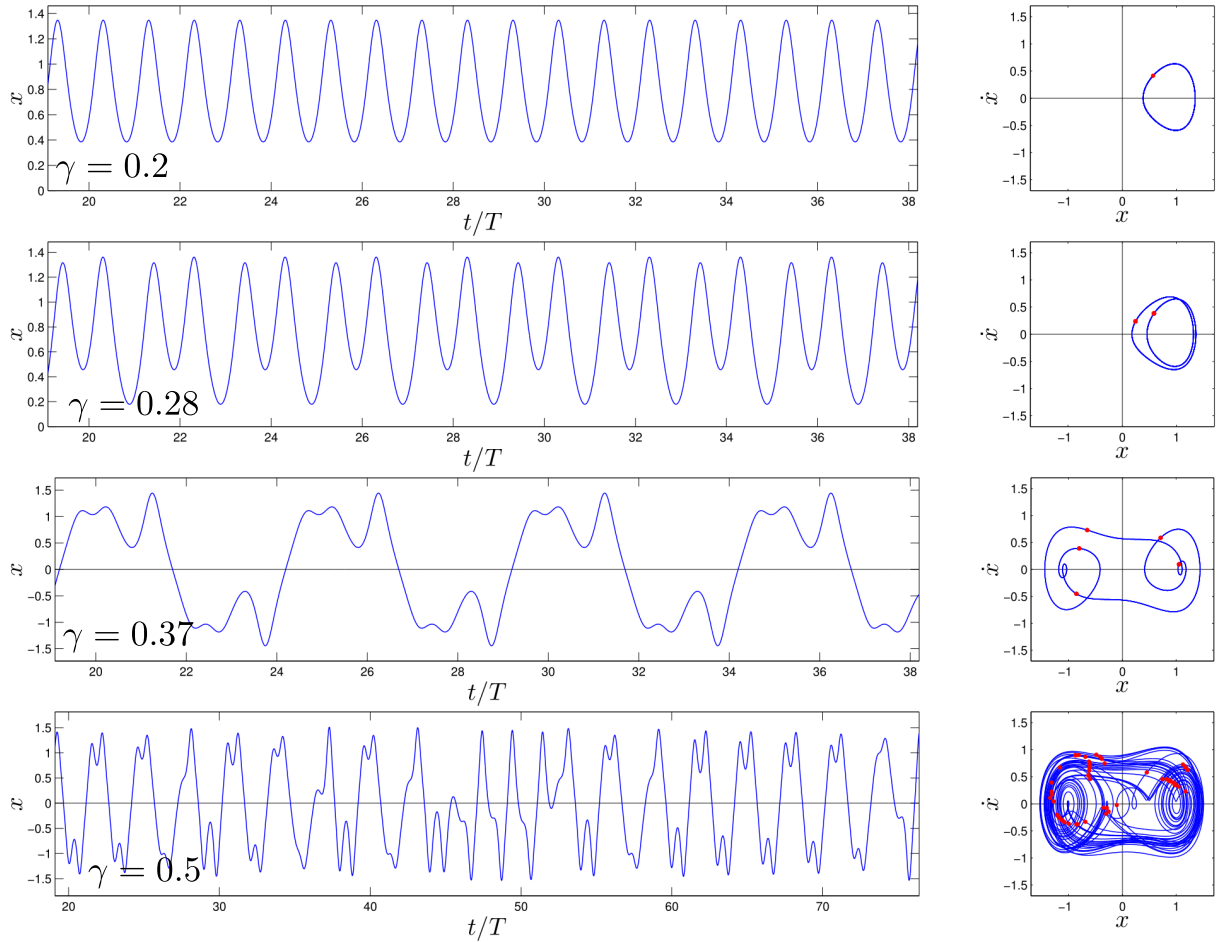
$$\omega = \omega_0 + \varepsilon \omega_1 + \varepsilon^2 \omega_2 + \dots$$

Déterminer les nouvelles équations satisfaites à l'ordre 0 et 1 en ε .

- (e) Montrer que ω est corrigée au premier ordre par l'amplitude de l'oscillation (bien connue pour le pendule libre). Interpréter physiquement le phénomène d'accrochage.

3 Oscillateur forcé ($\gamma \neq 0$)

1. Pour $\beta = \delta = 0$, décrire la section de Poincaré associée.
2. On donne ci-dessous quelques exemples de trajectoires temporelles et dans l'espace des phases avec les sections de Poincaré (points rouges) pour $\alpha = -1$, $\beta = 1$, $\delta = 0.3$, $\omega = 1.2$. Décrire les phénomènes observés lors de l'augmentation de l'amplitude $\gamma = 0.2, 0.28, 0.37, 0.5$:



TD 5 : Coefficients de Lyapounov

1 Première approche

Pour débiter, nous allons étudier la relation de récurrence à une seule variable

$$x_{n+1} = 10 x_n \mod 10$$

1. Expliquer pourquoi cette application "déplace la virgule".
2. Quels sont les points fixes et les orbites périodiques de cette application ?
3. Supposons qu'un ordinateur conserve 10 chiffres significatifs. En combien d'itérations a-t-il perdu la mémoire du point initial ? Définir le coefficient de Lyapounov de cette application.

L'application logistique pour $r = 4$ s'écrit

$$x_{n+1} = 4 x_n(1 - x_n)$$

4. Quels sont les points fixes et les coefficients de Lyapounov associés ?
5. *Facultatif.* En utilisant le changement de variable $x_n = \sin^2(\theta_n)$, montrer qu'on se ramène à peu près au problème précédent et que l'application est chaotique.

2 L'application du chat (Cat map)

L'application du chat fut proposée par Arnold dans le cadre des premières études systématiques des systèmes d'Anosov, c'est à dire complètement chaotique. Elle est toujours très utilisée de nos jours. Il s'agit du système dynamique suivant défini modulo 1.

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

1. S'agit-il d'un système conservatif ?
2. Quelle est la définition générale de la matrice de monodromie ?
Que vaut-elle dans ce cas ?
3. Calculer le coefficient de Lyapounov de cette application. Qu'en concluez-vous ?

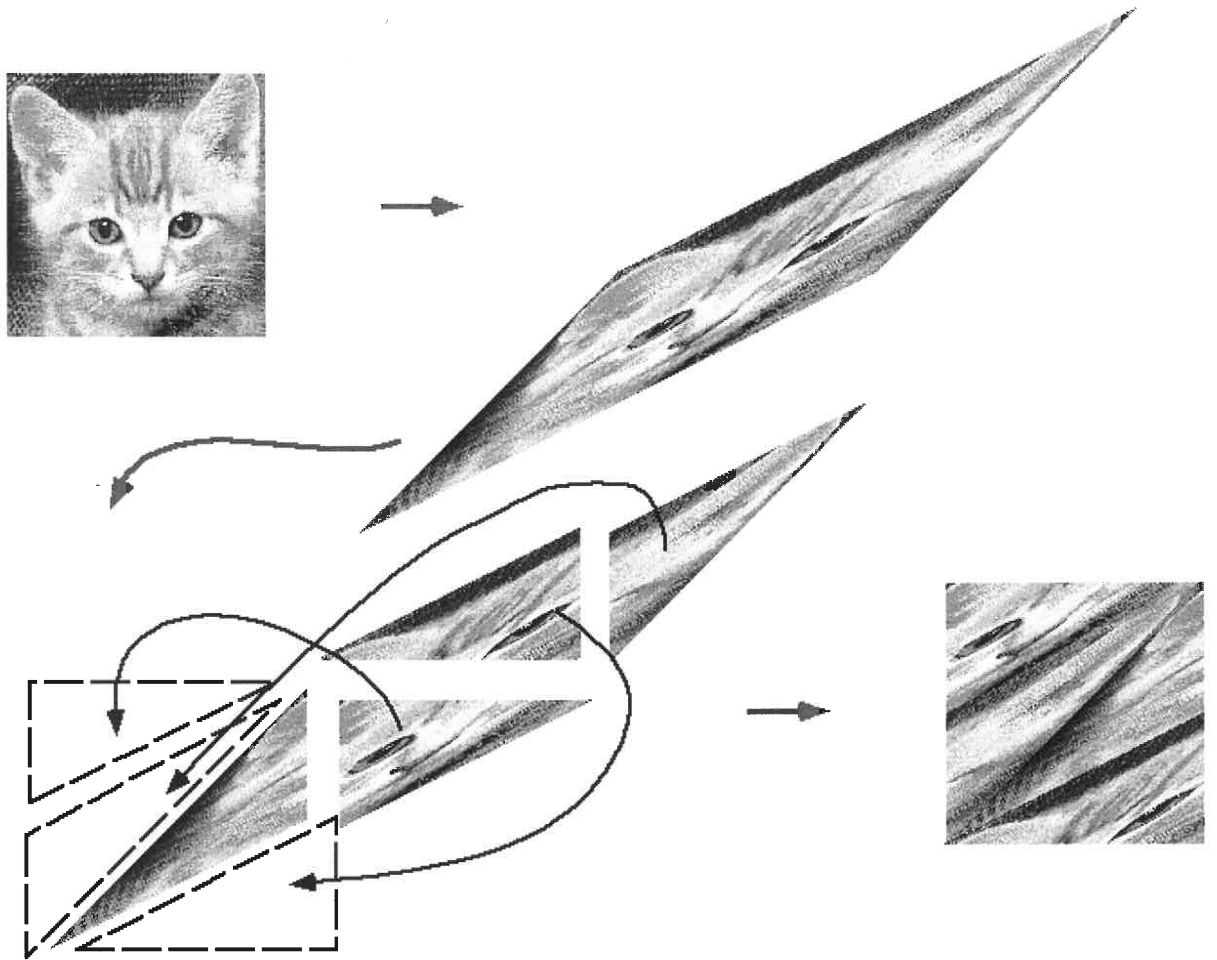


Figure 3: Application du chat. Schéma trouvé quelque part sur Internet. Merci à son auteur.

TD 6 : Convection de Rayleigh-Bénard

Une couche de fluide d'épaisseur a , supposée d'extension infinie dans les directions horizontales, est portée à une température T_0 au bas de la couche et T_a en haut. On posera $\overline{\Delta T} = T_0 - T_a$. Nous supposons le fluide Newtonien. L'écoulement dans la couche de fluide sera régi par les équations de Navier-Stokes (conservation de la quantité de mouvement et de la masse) et de la chaleur.

$$\rho \frac{D\vec{v}}{Dt} = \rho \left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \vec{v} \right) = -\vec{\nabla} p + \mu \Delta \vec{v} + \vec{f}_v \quad (9)$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = -\text{div}(\rho \vec{v}) \quad (10)$$

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \rho C_p \left(\frac{\partial T}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T \right) = \lambda \Delta T \quad (11)$$

avec ρ la masse volumique, μ la viscosité dynamique, C_p la capacité calorifique, λ la conductivité thermique. On pourra faire apparaître les diffusivités de quantité de mouvement et de chaleur : $\nu = \mu/\rho$ et $\kappa = \lambda/\rho C_p$.

$\vec{f}_v$ est la force volumique, uniquement due ici à la pesanteur $\vec{f}_v = \rho \vec{g}$.

L'écoulement est supposé incompressible : $\frac{D\rho}{Dt} = \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{v} \cdot \vec{\nabla}) \rho = 0$.

Il satisfait l'approximation de Boussinesq : les propriétés physiques du fluide seront supposées constantes à l'exception de la masse volumique dans le terme de poussée d'Archimède (seul moteur d'un éventuel écoulement) qui diminue linéairement avec la température $\rho = \rho_0[1 - \alpha(T - T_0)]$, avec $\alpha > 0$ (c'est le cas général, la seule exception étant l'eau en dessous de 4°C).

1 Observations

On peut observer la mise en route d'un écoulement lorsque $T_0 > T_a$, mais jamais lorsque $T_0 < T_a$.

1. Expliquer pourquoi en vous basant sur l'effet d'un déplacement vertical d'une particule fluide.
2. Dans la configuration instable, un écoulement n'est pas automatique mais nécessite la satisfaction d'une condition. Montrer que le nombre de Prandtl $Pr = \frac{\nu}{\kappa}$ et le nombre de Rayleigh $Ra = \frac{\alpha g \overline{\Delta T} a^3}{\kappa \nu}$ sont bien adimensionnés et que le nombre de Prandtl est lié aux temps caractéristiques de diffusion de la chaleur et de la quantité de mouvement. Le nombre de Prandtl ne dépend que de la nature du fluide. Le critère de déstabilisation dépendra donc du nombre de Rayleigh, à valeur donnée de Pr .

2 Les équations

1. Interprétez les différents termes des équations.
2. Montrez que la condition d'incompressibilité permet d'écrire simplement la conservation de la masse comme $\text{div}(\vec{v}) = 0$.

3 L'état hydrostatique

1. Ecrire les équations hydrostatiques, ainsi que les conditions aux bords.

2. Vérifier que les profils suivants sont solutions :

$$T_h(z) = T_0 - \frac{\overline{\Delta T}}{a} z \quad (12)$$

$$\rho_h(z) = \rho_0 \left(1 + \alpha \frac{\overline{\Delta T}}{a} z \right) \quad (13)$$

$$p_h(z) = p_0 - \rho_0 g z - \frac{g \rho_0 \alpha \overline{\Delta T}}{2a} z^2 \quad (14)$$

3. On ajoute des petites perturbations à l'état hydrostatique et on décompose les champs $\vec{v} = \delta \vec{v}$ (forcément), $p = p_h + \delta p$, $T = T_h + \delta T$ et $\rho = \rho_h + \delta \rho$. Montrer que les équations caractérisant l'écart à l'équilibre s'écrivent, en supposant $\delta T \ll T_0$ et $\delta \vec{v}$ très faible au début de l'instabilité :

$$\frac{\partial \delta \vec{v}}{\partial t} = -\frac{1}{\rho_0} \vec{\nabla} \delta p + \nu \Delta \delta \vec{v} + \alpha \delta T g \vec{e}_z \quad (15)$$

$$\text{div}(\delta \vec{v}) = 0 \quad (16)$$

$$\left(\frac{\partial \delta T}{\partial t} + (\delta \vec{v} \cdot \vec{\nabla}) T_h \right) = \kappa \Delta \delta T \quad (17)$$

4. Que vaut δT aux parois inférieure et supérieure ?

4 Modèle unidimensionnel

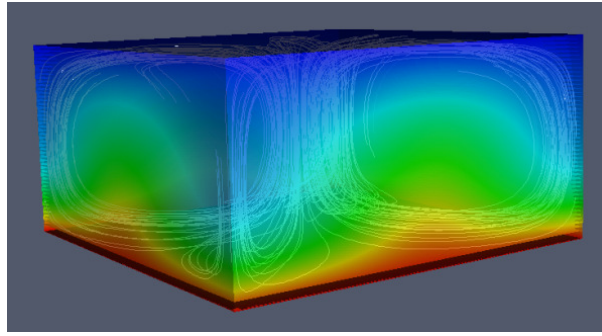
Un modèle simplifié consiste à se focaliser uniquement sur la température et la composante verticale de la vitesse (seule influencée par le champ de température). On suppose également un écoulement bi-dimensionnel avec $v_y = 0$ et y une direction d'invariance. Pour aboutir à un modèle qualitatif unidimensionnel, on supposera de plus que les variations verticales de toutes les quantités sont négligeables. Elles ne dépendront donc que de x et du temps : $\delta \vec{v} = w(x, t) \vec{e}_z$ et $\delta T = \delta T(x, t)$.

1. Montrer que ces conditions permettent d'écrire le modèle suivant :

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \alpha g \delta T \quad (18)$$

$$\frac{\partial \delta T}{\partial t} = \kappa \frac{\partial^2 \delta T}{\partial x^2} + w \frac{\overline{\Delta T}}{a} \quad (19)$$

2. Étudier la dynamique de modes Fourier en x de la solution, en posant $w(x, t) = W e^{s t} \cdot \cos(k x)$ et $\delta T(x, t) = \Theta e^{s t} \cos(k x)$.
3. Montrer que ce modèle respecte la stabilité d'une couche de fluide chauffée par le haut et aboutit à une instabilité conditionnelle d'une couche de fluide chauffée par le bas. Vous déterminerez la valeur critique du nombre de Rayleigh en fonction de k .
4. La valeur critique expérimentale du nombre de Rayleigh est environ $Ra_c = 1700$. Comparer à la valeur fournie par le modèle.
5. En vous inspirant de la figure ci-dessus représentant un écoulement de Rayleigh-Bénard tridimensionnel, discuter de l'hypothèse à lever prioritairement pour espérer obtenir une valeur plus conforme du seuil.



5 Transition vers le chaos

Quand le nombre de Rayleigh devient bien plus grand que sa valeur critique, on observe une transition vers le chaos.

1. Proposer quelques scénarios typiques de transition vers le chaos.
2. Quels paramètres gouvernent le choix du scénario ?

TD 7 : Fractale et toile d'araignée

1 Dimension fractale de l'ensemble de Cantor

L'ensemble de Cantor est défini comme l'ensemble limite issu de la procédure suivante. Considérons l'intervalle $[0;1]$ sur l'axe réel. Cet intervalle est divisé en trois parties égales et on retire celle du milieu. A l'étape suivante, on considère les deux segments restant. Chacun est divisé en trois parties égales et on supprime celles du milieu. Puis on continue.

1. La "dynamique symbolique" consiste à représenter chaque étape par un des symboles "0", "1" ou "2". Des "mots" sont ainsi écrits avec cet alphabet à trois symboles. Quels sont les "mots" qui subsistent dans l'ensemble de Cantor ?
2. Justifier le caractère fractal de l'ensemble de Cantor.
3. Que vaut la dimension fractale de l'ensemble de Cantor ? On utilisera la dimension de boîte définie par

$$d = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\ln(M(\epsilon))}{\ln(1/\epsilon)}$$

où $M(\epsilon)$ est le nombre minimum d'éléments de taille ϵ nécessaire pour recouvrir l'ensemble.

2 Dimension fractale de littoraux (Facultatif)

Les côtes maritimes sont formées par différents processus naturels, tels que l'érosion de la roche par la mer, et sont très souvent irrégulières. L'article de Husain et al. *Fractal dimension of coastline of Australia*, Scientific Reports 11 :6304 (2021) en propose une analyse en termes de dimension fractale que nous allons reprendre dans cet exercice.

1. En vous appuyant sur les photos de la figure 4, justifier le caractère fractal des côtes.
2. Sur la même figure, on peut voir les côtes et frontières de différents pays. A l'aide d'arguments purement qualitatifs, classer la Grande Bretagne (a), l'Australie (d) et l'Afrique du Sud (e) selon leur dimension fractale.

Pour l'Australie, les auteurs de l'article ont procédé aux opérations suivantes à partir d'images satellites de haute résolution :

- Sur ces images, une grille carrée à 2D dimensions a été créée, avec un pas a de taille variable.
 - Pour chaque valeur de a , on compte le nombre de carrés contenant un morceau de littoral, noté $N(a)$
 - Les résultats sont donnés dans la table 1.
3. A l'aide de la table 1, déterminer la dimension fractale du littoral de l'Australie.
 4. *Bonus* : Quels sont les problèmes pratiques soulevés par le caractère fractal des frontières ou des littoraux ?

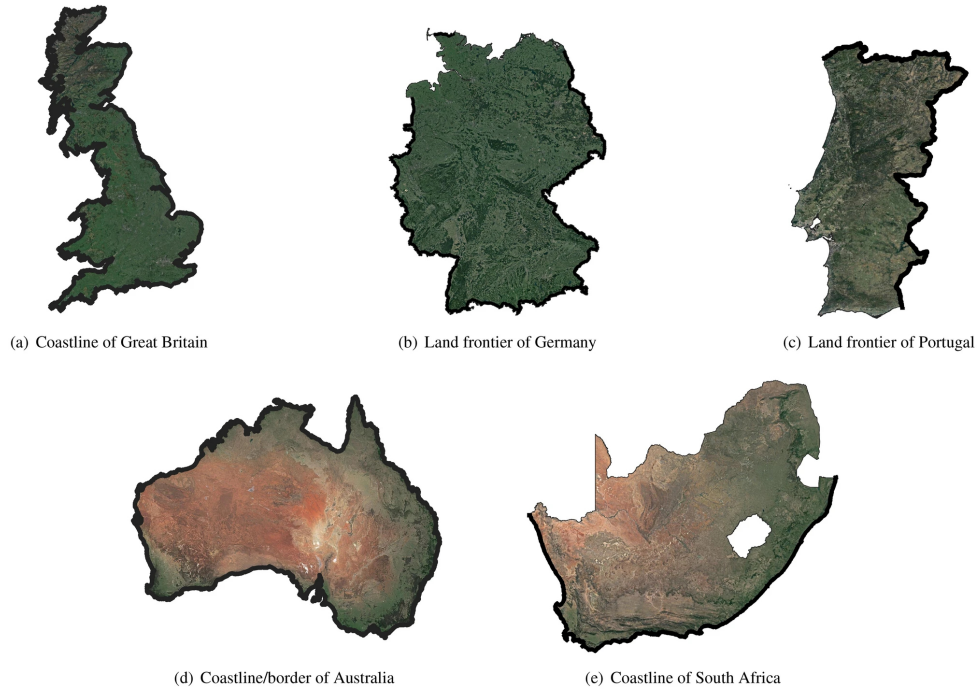


Figure 4: Photographies satellites en fausses couleurs de différents pays. Les frontières sont découpées par le logiciel spécialisé QGIS (cf. détails dans l'article).

$a[\text{km}]$	0.5	1	5	10	25	50	75	100
N	82516	38889	6213	2846	977	451	285	198
$a[\text{km}]$	200	250	300	400	500	600	800	950
N	92	68	57	43	32	25	19	14

Table 1: Nombre de boîtes de taille a contenant un fragment de littoral

3 Fractale et optimisation des bronches (examen 2025)

Cet exercice est adapté de l'article [1] *An Optimal Bronchial Tree May Be Dangerous*, B. Mauroy, M. Filoche, E. R. Weibel, et B. Sapoval, Nature, vol. 427, 633, (2004).

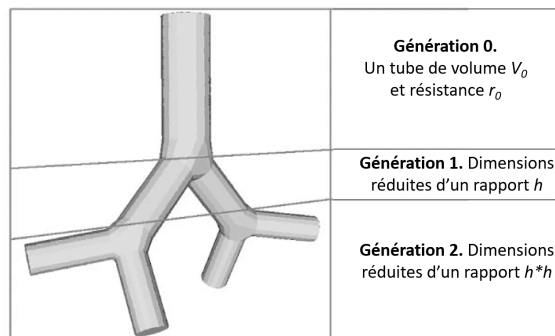


Figure 5: Schéma extrait de [1] et adapté aux notations de l'exercice.

L'air entre par la bouche et finit dans les bronchioles. Le transport se fait dans des conduits en ramification sous forme d'arbre, comme l'illustre la figure 1. A chaque embranchement, un "tube" parent de longueur L_i et de diamètre D_i donne naissance à 2 tubes enfants de taille réduite, de longueur $L_{i+1} = h_i L_i$ et de diamètre $D_{i+1} = h_i D_i$. Pour simplifier, nous supposons

que le rapport de réduction h_i est le même pour la longueur et le diamètre. Nous supposons aussi que ce rapport h est le même à toutes les générations i . Chez l'homme, il y a $N = 17$ générations. L'objectif de l'article et de cet exercice est d'optimiser le rapport de taille h de sorte que les pertes de pression dues à la viscosité soient les plus faibles possibles, ce qui facilite la respiration.

1. Combien y a-t-il de tubes (= bronchioles) appartenant à la génération i ?
2. Exprimer le volume d'un tube à la génération i , noté V_i , en supposant qu'il est cylindrique, puis l'exprimer en fonction de h et de V_{i-1} . En déduire l'expression de V_i en fonction de h et de V_0 .
3. L'objectif de l'arbre respiratoire est d'apporter l'air jusque dans les bronchioles de la génération $N = 17$ en limitant la chute de pression $\Delta P = P_{\text{bouche}} - P_{N=17}$. En effet la pression diminue lors de l'écoulement dans les tubes à cause de la viscosité. On considère que le flux d'air dans un tube est approximativement conforme à la loi de Poiseuille :

$$\Delta P = \frac{128\eta L}{\pi D^4} Q \quad (20)$$

où D est le diamètre du tube, L sa longueur, η la viscosité du fluide en écoulement et Q le débit volumique du fluide traversant le tube. Justifier qualitativement la formule de Poiseuille.

4. On peut réécrire la formule de Poiseuille sous la forme $\Delta P = RQ$, où R est appelée la résistance hydraulique. On appelle r_i la résistance hydraulique d'un tube à la génération i . Donner l'expression de r_i en fonction de r_{i-1} et de h , puis en fonction de r_0 et de h .
5. On admet que l'on peut utiliser les mêmes lois d'associations pour des résistances hydrauliques pour que pour des résistances électriques. C'est-à-dire que la résistance globale R de deux résistances R_a et R_b en série s'écrit $R = R_a + R_b$, alors que si elles sont en parallèle la résistance globale vaut $\frac{1}{R} = \frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b}$. Donner l'expression de R_i , la résistance globale de tous les tubes appartenant à la génération i .
6. Donner l'expression de la résistance globale de tout l'arbre respiratoire, R_{tot} , en fonction de r_0 , h et N .
7. Il existe une valeur critique de h , notée h_c , telle que le volume total de l'arbre respiratoire diverge avec N si $h > h_c$. Donner l'expression de h_c et expliquer à quoi elle correspond en comparant le volume d'un tube à la génération i et celui de ses enfants à la génération $i + 1$.
8. Il est donc raisonnable de choisir $h < h_c$. Dans ce cas, qu'arrive-t-il à la résistance totale quand N augmente ? En conclusion, quelle est la valeur optimale de h ?
9. Chez l'homme, h_{exp} vaut environ 0,85 alors que l'expression de h_c conduit à environ 0,79. Proposer une explication en termes d'avantage évolutif.

4 Représentation en "toile d'araignée"

On s'intéresse à l'application discrète

$$x_{n+1} = g(x_n) = -(1 + \mu)x_n + x_n^2$$

1. Etudier les points fixes et leur stabilité.
2. Tracer la "toile d'araignée" dans le cas $\mu = 1/4$ et montrer l'apparition d'un cycle de période 2.

TD 8 *facultatif*: Formule de trace pour le billard rectangulaire

Un *billard* est un système où une particule se déplace librement dans une enceinte plane dont les contours peuvent avoir une géométrie variée. Ici nous nous intéresserons au cas du billard rectangulaire. Du point de vue de la physique classique, la particule se déplace en ligne droite à l'intérieur du billard et rebondit sur les parois de manière spéculaire et élastique (ie. comme un rayon lumineux et sans perte d'énergie). Du point de vue de la physique quantique, cette particule (par exemple, un électron) doit être considérée comme une onde. Elle vérifie alors l'équation de Schrödinger stationnaire qui possède des modes et énergies propres.

Dans ce TD, nous allons étudier chacun de ces deux régimes et montrer que la densité d'états (objet purement quantique) peut s'exprimer comme une somme sur les trajectoires périodiques classiques.

1 Système classique

On considère un rectangle de côtés a selon l'axe x et b selon l'axe y , avec $a > b$. On s'intéresse à ses *orbites périodiques* qui sont les trajectoires classiques périodiques.

1. Proposer quelques orbites périodiques simples. Donner leurs longueurs.
2. L'objectif est de trouver toutes les orbites périodiques du rectangle. Une méthode efficace est d'utiliser le *dépliage* qui, lors d'une réflexion, consiste à réfléchir la cavité plutôt que la trajectoire. Comme le rectangle pave le plan, on obtient un "tapis de rectangle". Montrer que les orbites périodiques sont alors des droites.
3. Montrer que la longueur d'une orbite périodique s'écrit, avec m et n entiers :

$$L_{mn} = 2\sqrt{(ma)^2 + (nb)^2} \quad (21)$$

2 Système quantique

On considère désormais une particule (par exemple un électron) de masse m_e assujettie à se déplacer librement dans ce même rectangle avec des conditions aux bords de Dirichlet ($\psi = 0$ sur les bords).

1. Ecrire l'équation de Schrödinger stationnaire d'énergie E vérifiée par la fonction d'onde ψ de cette particule.
2. Donner les fonctions d'ondes et montrer que leur énergie propre s'écrit

$$\epsilon_{pq} = \frac{\hbar^2}{2m_e} \left[\left(\frac{p\pi}{a} \right)^2 + \left(\frac{q\pi}{b} \right)^2 \right] \quad p, q = 1, 2, 3 \dots \quad (22)$$

3. Que se passe-t-il si on choisit p ou q négatif ?

3 Formule de trace

La densité d'états est définie comme la somme sur l'ensemble des énergies propres :

$$\rho(E) = \sum_{p=1}^{\infty} \sum_{q=1}^{\infty} \delta(E - \epsilon_{pq}) \quad (23)$$

1. Montrer qu'en négligeant les cas $p, q = 0$, la formule (23) peut s'écrire

$$\rho(E) = \frac{1}{4} \sum_{p=-\infty}^{\infty} \sum_{q=-\infty}^{\infty} \delta(E - \epsilon_{pq}) \quad (24)$$

2. Pour transformer cette expression, on utilise la formule de Poisson :

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(n) = \sum_{N=-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{i2\pi Nt} dt \quad (25)$$

Appliquer la formule de Poisson successivement aux indices p et q de $\rho(E)$. L'indice associé à p est noté P et celui pour q noté Q .

3. Pour calculer cette intégrale double, on passe en coordonnées polaires : $p = a \frac{r}{2\pi} \cos \varphi$ et $q = b \frac{r}{2\pi} \sin \varphi$. Montrer que la densité d'états s'écrit :

$$\rho(E) = \frac{ab}{16\pi^2} \sum_{P=-\infty}^{\infty} \sum_{Q=-\infty}^{\infty} \int_{r=0}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} r dr d\varphi \delta\left(E - \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{r^2}{4}\right) e^{ir(Pa \cos \varphi + Qb \sin \varphi)} \quad (26)$$

4. Effectuer l'intégrale sur r . Prendre garde à effectuer le changement de variable $u = \frac{\hbar^2}{2m_e} \frac{r^2}{4}$ au préalable.
5. Montrer que la densité d'états peut se réécrire

$$\rho(E) = \frac{ab}{4\pi^2} \frac{m_e}{\hbar^2} \sum_{P=-\infty}^{\infty} \sum_{Q=-\infty}^{\infty} \int_{\varphi=0}^{2\pi} d\varphi e^{i2k \vec{v} \cdot \vec{w}} \quad (27)$$

avec $k^2 = \frac{2m_e E}{\hbar^2}$ et $\vec{w} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$. Quelles sont les composantes de $\vec{v}$?

6. La fonction de Bessel J_0 a une expression intégrale

$$J_0(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\theta e^{ix \cos \theta} \quad (28)$$

Expliquer pourquoi la densité d'états s'écrit

$$\rho(E) = \frac{ab}{2\pi} \frac{m_e}{\hbar^2} \sum_{P=-\infty}^{\infty} \sum_{Q=-\infty}^{\infty} J_0(kL_{PQ}) \quad (29)$$

7. Retrouver le terme de Weyl. Il correspond à $P = Q = 0$:

$$\bar{\rho}(E) = \frac{m_e}{2\pi\hbar^2} \text{Aire} \quad (30)$$

8. Il se trouve que J_0 possède une expression asymptotique :

$$J_0(z) \xrightarrow{z \rightarrow \infty} \sqrt{\frac{2}{\pi z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \quad (31)$$

Vérifier qu'on retrouve bien la formule attendue

$$\rho(E) = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{m_e}{\hbar^2} \sum_{\substack{\text{orbites} \\ \text{periodiques}}} \frac{ab}{\sqrt{k L_{PQ}}} \cos\left(kL_{PQ} - \frac{\pi}{4}\right) \quad (32)$$

Annexe - Annale

1 Rappel sur la matrice jacobienne

Soit $\vec{F}(\vec{x})$ une fonction à N composantes $f_i(\vec{x})$ de la variable $\vec{x} = (x_1, \dots, x_M)$ ayant M composantes. Alors, la matrice jacobienne $J_F(\vec{x}_0)$ au point $\vec{x}_0$ a une dimension $N \times M$ et les éléments de matrice définis par les dérivées partielles

$$[J_F(\vec{x}_0)]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(\vec{x}_0). \quad (33)$$

Elle intervient naturellement dans la différentielle

$$d\vec{F}(\vec{x}_0) = J_F(\vec{x}_0) d\vec{x}. \quad (34)$$

Le jacobien est le déterminant en valeur absolue de cette matrice et intervient dans les changements de variables des intégrales multiples. Exemple dans le cas 2×2 pour $\vec{F}(\vec{x}) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$:

$$d\vec{F} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}. \quad (35)$$

2 Equation de Mathieu et matrice de Floquet (examen 2023)

Une équation de Mathieu correspond à un pendule simple avec forçage périodique dans l'approximation des petits angles :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2(1 - \epsilon \cos \Omega t)\theta = 0 \quad (36)$$

Elle porte le nom du mathématicien Emile Mathieu (Metz 1835, Nancy 1890) qui l'a publiée dans le cadre de ses études sur les vibrations des plaques elliptiques. Ses solutions, appelées *fonctions de Mathieu*, sont difficiles à exprimer analytiquement, mais leurs valeurs numériques s'obtiennent directement via des logiciels comme Scipy ou Mathematica.

Cette équation apparaît naturellement dans divers problèmes physiques comme les perturbations du mouvement de la Lune ou la résonance paramétrique. Un exemple célèbre de résonance paramétrique est l'encensoir de la cathédrale de Saint-Jacques de Compostelle. Il s'agit d'un pendule simple de masse $m = 54$ kg, accroché à une corde de longueur $l = 20$ m, dont l'autre extrémité passe dans un système de tambours en haut du transept, avant de revenir à terre. Le point d'attache du pendule en haut du transept peut ainsi être déplacé. Huit hommes tirent sur la corde à chaque fois que l'encensoir passe au ras du sol, soit deux fois par période. Les oscillations de l'encensoir prennent alors une amplitude considérable.

La résolution de l'équation (36) par une méthode perturbative standard met en évidence l'amplification du mouvement, mais la solution n'est pas réaliste. Dans cet exercice, nous allons utiliser la théorie de Floquet² pour montrer que le point fixe $(\theta = 0, \dot{\theta} = 0)$ est instable pour certaines valeurs de Ω .

1. Identifier les différents termes de l'équation (36) et donner l'expression de ω_0 en fonction de l et g .

²Cet exercice est issu du site https://media4.obspm.fr/public/AAM/pages_e-d-02/exo-eqmathieu.html

2. Mettre l'équation (36) sous forme "normale". Montrer qu'elle peut s'écrire sous la forme

$$\frac{d\vec{Z}}{dt} = B(t)\vec{Z} \quad (37)$$

où $B(t)$ est une matrice et $\vec{Z} = (\theta, \dot{\theta})$. Donner l'expression de B .

3. On considère la condition initiale $\vec{X} = \vec{Z}(t=0) = (\theta_0, \dot{\theta}_0)$. D'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, il lui est associé une unique solution $\vec{Z}(t)$ de l'équation différentielle (36). Il est ainsi possible de construire une application $A(t)$ qui à chaque condition initiale $\vec{X}$ associe une solution $\vec{Z}(t)$. En prenant deux conditions initiales différentes, montrer que cette application $A : \vec{X} \rightarrow \vec{Z}(t) = A(t)\vec{X}$ est linéaire. Puisque l'application $A(t)$ est linéaire, $A(t)$ est une matrice 2x2.
4. Donner l'expression de $A(t)$ dans le cas où $\epsilon = 0$.
5. Pour ϵ quelconque, montrer que A vérifie l'équation différentielle suivante

$$\frac{dA}{dt} = B(t) A(t) \quad (38)$$

Si une matrice quelconque A vérifie une équation telle que (38), alors on montre (*la démonstration pédestre et fastidieuse n'est pas demandée*) que

$$\det A(t) = \exp \left(\int_0^t \text{tr} B(u) du \right) \quad (39)$$

6. La période est notée $T = 2\pi/\Omega$. La théorie de Floquet repose sur l'identité

$$A(t+T) = A(t) \times A(T) \quad (40)$$

$A(T)$ s'appelle la matrice de Floquet. Démontrer la relation (40) en considérant la solution $\vec{Z}_1(t)$ de l'équation différentielle (37) de condition initiale $A(T)\vec{X}$ (pour un $\vec{X}$ quelconque), puis la solution $\vec{Z}_2(t) = A(t+T)\vec{X}$.

7. Montrer que les valeurs propres λ_1 et λ_2 de la matrice de Floquet $A(T)$ vérifient $\lambda_1\lambda_2 = 1$.
8. En utilisant la relation (40), montrer que si λ_1 et λ_2 sont réelles et différentes de 1, alors le système est instable.
9. Toujours en utilisant la relation (40), montrer que si λ_1 et λ_2 sont complexes, alors la solution $\vec{Z}(t)$ reste bornée (et il n'y a donc pas d'instabilité).
10. Dans le cas de l'équation de Mathieu (36) et pour ϵ petit, on montre (*ne pas le faire*) que la trace de $A(T)$ est la même que la trace de $A(T)$ pour $\epsilon = 0$ calculée à la question 4. Celle-ci vaut $2 \cos \omega_0 T$. Montrer que le système est en limite de stabilité pour $\omega_0 T = k\pi$ où k est un entier.
11. Que vaut k pour l'encensoir de la cathédrale de St Jacques de Compostelle ? C'est le même que pour un enfant qui se balance sur une escarpolette (balançoire simple).